SJIF Impact Factor: 7.001| ISI I.F.Value:1.241| Journal DOI: 10.36713/epra2016 ISSN: 2455-7838(Online)
EPRA International Journal of Research and Development (IJRD)
Volume: 5 | Issue: 6 | June 2020 - Peer Reviewed Journal

ON A GENERALIZATION OF THE EQUATION J.WIENERA

G.A.Sodikova
Assistant Fergana Polytechnic Institute

ABSTRACT
The article shows a general solution of this equation x ^ n f (x) = f (1 / x) using the generalized method of J. Wiener.
KEYWORDS AND EXPRESSIONS: *J. Wiener equation, general solution, Euler equations, characteristic equation*

Аннотация: В статье показано общее решение этого уравнения x ^ n f (x) = f (1 / x) с использованием обобщенного метода Дж. Винера.
Ключевые слова и выражения: уравнение Дж. Винера, общее решение, уравнения Эйлера, характеристическое уравнение

В работе [1] J.Wiener приводилобщее решения уравнения

$$x^n f(x) = f(\tfrac{1}{x}) \qquad (1)$$

который являетсяобобщением уравнения Ж.Винера [2] при n=0.В свою очередь можно рассматривать следующие обобщение уравнения (1):

$$x^n f^{(m)}(x) = f^{(m-1)}\left(\frac{1}{x}\right), m \in N, x \in R_+ \qquad (2)$$

Дифференцируя уравнения (2) с учетом равенство

$$f^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right) = x^n f^{(m-1)}(x)$$

после несложных вычисления получим, что

$$x^n f^{(m+1)}(x) + nx^{n-1} f^{(m)}(x) + x^{n-2} f^{(m-1)}(x) = 0,$$

или вводя замену $f^{(m-1)}(x) = g(x)$ отсюда нетрудно получить уравнения Эйлера

$$x^2 g^{II}(x) + nxg(x) + g(x) = 0 \qquad (3)$$

который рассмотрено в работе [1] и ее решения имеет вид

Характеристическая уравнения (3)

$$\lambda(\lambda - 1) + n\lambda + 1 = 0 \qquad (4)$$

SJIF Impact Factor: 7.001| ISI I.F.Value:1.241| Journal DOI: 10.36713/epra2016 ISSN: 2455-7838(Online)
EPRA International Journal of Research and Development (IJRD)
Volume: 5 | Issue: 6 | June 2020 - Peer Reviewed Journal

имеет корни

$\lambda_{1,2} = \frac{1-n}{2} \pm i\frac{\sqrt{(n+1)(3-n)}}{2} = \frac{1-n}{2} \pm i\alpha, \alpha = \frac{\sqrt{(n+1)(3-n)}}{2}$. (5)

Рассмотрим следующих случаи:

а)если $n = -1$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и общая решения уравнения (3) имеет вид

$g(x) = x(C_1 + C_2 lnx)$

б)если $n = 3$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ и общая решения уравнения (3) имеет вид

$g(x) = x^{-1}(C_1 - C_2 lnx)$

в)если $n < -1$ или $n > 3$,то характеристическое уравнения имеет различные действительные корни λ_1 и λ_2 при этом общее решения уравнения (3) имеет вид

$g(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}$

г)если -1< $n < 3$,то корни характеристического уравнения (4) λ_1 и λ_2 комплексно сопряжены ,т.е.

$$\lambda_{1,2} = \frac{1-n}{2} \pm i\frac{\sqrt{(n+1)(3-n)}}{2} = \frac{1-n}{2} \pm i\alpha, \alpha = \frac{\sqrt{(n+1)(3-n)}}{2}$$

Поэтомуобщее решения уравнения (3) имеет вид

$$x(t) = t^{\frac{1-n}{2}}[C_1 \cos(\alpha lnt) + C_2 \sin(\alpha lnt)]$$

Далее используя связь $f^{(m-1)}(x) = g(x)$ находиться функция $f(x)$.Подставляя это функцию в уравнению (2) определяется зависимость между коэффициентами C_1 и C_2,что позволяет находить общее решения.

Пример. Качество примера мы приведем общее решения уравнения второго порядка с инволюциями

$y^{II}(t) = y^{I}(\frac{1}{t})$ (6)

Производя замену аргумента $t \to \frac{1}{t}$ в уравнение (6)

получим, что

$y^{II}\left(\frac{1}{t}\right) = y^{I}(t), t \in R^{+}$ (7)

Дифференцируя уравнения (6) с учетом (7) имеем

$$t^2 y^{III}(t) + y^{I}(t) = 0$$

С умножениям на t это уравнение сводится к уравнению Эйлера

$t^3 y^{III}(t) + t y^{I}(t) = 0$ (8)

Характеристическая уравнения (8): $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0, \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то общее решения (8) можно представить в виде

$$y(t) = C_1 + t^{\frac{3}{2}}\left[C_2\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}lnt) + C_3\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}lnt)\right] \qquad (9)$$

Решение уравнения (6) будем искать в виде (9).Тогда получим связь между произвольными коэффициентами:$C_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}C_2$ и $C_3 = \sqrt{3}C_2$

Общее решения уравнения (6) при $C_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}C_2$:

$$y(t) = C_1 + C_2t\sqrt{t}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}lnt\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}lnt)\right] = C_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}C_2t\sqrt{t}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}lnt\right) = A + Bt\sqrt{t}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}lnt\right)$$

, а,при $C_3 = \sqrt{3}C_2$:

$$y(t) = C_1 + C_2t\sqrt{t}\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}lnt\right) + \sqrt{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}lnt)\right] = C_1 + 2C_2t\sqrt{t}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}lnt\right)$$

$$= C + Dt\sqrt{t}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}lnt\right)$$

Следовательно решением уравнения (6) могут быть функции

$y(x) = A + Bt\sqrt{t}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}lnt\right)$ или $y(x) = C + Dt\sqrt{t}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}lnt\right)$,

где A,B,C и D произвольные постоянные.Проверка показывает,что вторая функция не удовлетворяет уравнению (7).Таким образом общимрешением уравнения (6) является функция

$$y(x) = A + Bt\sqrt{t}\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}lnt\right)$$

REFERENCES

1. *1.Wiener, J.:Generalized solutions of functional differential equations.World Scientific,1993.*
2. *2.Silberstein L.:Solution of the equation* $f^I(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. *Lond.Edinb.Dubl.Phil.Mag.30(200),185-186 (1940)*
3. *Farxodjonova N. Features of modernization and integration of national culture //Scientific Bulletin of Namangan State University. – 2019. – Т. 1. – №. 2. – С. 167-172.*
4. *Farxodjonqizi F. N., Dilshodjonugli N. S. Innovative processes and trends in the educational process in Uzbekistan //ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal. – 2020. – Т. 10. – №. 4. – С. 621-626.*
5. *Farxodjonova N. F. Problemi primeneniya innovatsionnix texnologiy v obrazovatel'nom protsesse na mejdunarodnom urovne //Mejdunarodnaya konferentsiya. Innovatsionnie tendentsii, sotsial'no-ekonomicheskie i pravovie problemi vzaimodeystviya v mejdunarodnom prostranstve.-2016.-S. – С. 58-61.*