SJIF Impact Factor 2021: 8.013| ISI I.F.Value:1.241| Journal DOI: 10.36713/epra2016 ISSN: 2455-7838(Online)
EPRA International Journal of Research and Development (IJRD)
Volume: 6 | Issue: 12 | December 2021 - Peer Reviewed Journal

A NOLOCAL PROBLEM FOR A THIRD-ORDER EQUATION WHOSE CHARACTERISTIC IS MULTIPLE

Azizjan Mamasolievich Turginov[1], Mukhtasarkhon Azizjon Qizi Mamasolieva[2]

[1]*Kokand State Pedagogical Institute*
[2]*Kokand State Pedagogical Institute*

ABSTRACT
This article examines the nolocal problem for a third-order equation with multiple characteristics.
KEYWORDS: *E. Del Vecchio, L.Cattabriga, теория потенциалов, граничными условиями.*

НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Азизджан Мамасолиевич Тургинов,
Мухтасархон Азизжон қизи Мамасолиева
Кокандский Государственный педегогический институт

Аннотация: В статье исследуется локальная задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.
Ключевые слова: E. Del Vecchio, L.Cattabriga, теория потенциалов, граничными условиями.

1. Введение Известно, что в работе E. Del Vecchio дана методика построение фундаментальных решений уравнение с кратными характеристика-ми и в качестве приложение построена фундаментальные решение уравнение (см.[1])

$$Lu \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Далее, L.Cattabriga развивая работу E.Del Vecchio 1959 году построил фундаментальные решения уравнение (см.[2])

$$Lu \equiv \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} - (-1)^n \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,\ n \in \mathrm{N}, n < \infty \tag{2}$$

и разработал теория потенциалов фундаментальных решений. Дальнейшем исследователями была рассмотрено ряд краевых задач для уравнение (1) с локальными граничными условиями, например, (см.[2]-[4]).

В области $\Omega=\{(x,t):0<x<1,\ 0<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{3}$$

с нелокальными граничными условиями

$$u(x,0)=u(x,T),\qquad u_t(x,0)=u_t(x,T), \tag{4}$$

$$u_x(0,t)=\varphi(t),\qquad u(1,t)=\psi_1(t),\qquad u_x(1,t)=\psi_2(t). \tag{5}$$

в классе $u(x,t)\in C^{3,2}_{x,t}(\Omega)\cap C^{2,1}_{x,t}(\overline{\Omega})$.

Известно, что фундаментальные решения уравнение (3) имеет следующей вид (см. [3]).

$$U(x-\xi;t-\tau)=|t-\tau|^{1/3}\ f\left(\frac{x-\xi}{|t-\tau|^{2/3}}\right),\ \ x\neq\xi,\ t\neq\tau; \tag{6}$$

$$V(x-\xi;t-\tau)=|t-\tau|^{1/3}\ \varphi\left(\frac{x-\xi}{|t-\tau|^{2/3}}\right),\ \ x<\xi,\ t\neq\tau. \tag{7}$$

Здесь

$$f(z)=\frac{2}{3}|z|^{1/2}\int_z^{\infty}\eta^{-3/2}f^*(\eta)d\eta+c^+,\quad z>0, \tag{8}$$

$$f(z)=\frac{2}{3}|z|^{1/2}\int_{-\infty}^{z}\eta^{-3/2}f^*(\eta)d\eta+c^-,\quad z<0, \tag{9}$$

$$\varphi(z)=\frac{2}{3}|z|^{1/2}\int_{-\infty}^{z}\eta^{-3/2}\varphi^*(\eta)d\eta+c,\quad z<0, \tag{10}$$

$$f^*(z)=\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{2}}+\lambda z\right)d\lambda,\ \ -\infty<z<\infty,$$

$$\varphi^*(z)=\int_0^{\infty}\exp\left(\lambda z-\lambda^{3/2}\right)d\lambda+\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{\lambda^{3/2}}{\sqrt{2}}+\lambda z\right)d\lambda,\qquad z<0,$$

$$z=(x-\xi)|t-\tau|^{-2/3}.$$

Для функции

$$U(x-\xi;t-\tau),\qquad V(x-\xi;t-\tau),$$

$$U^*(x-\xi;t-\tau),\qquad V^*(x-\xi;t-\tau),$$

$$f(z),\quad \varphi(z),\quad f^*(z),\quad \varphi^*(z)$$

справедливы соотношения

$$f''(z)+\frac{2}{3}zf^*(z)=0,\qquad \varphi''(z)+\frac{2}{3}z\varphi^*(z)=0, \tag{11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(z) = \pi, \quad \int_{-\infty}^{0} f^*(z) = \frac{2\pi}{3}, \quad \int_{0}^{\infty} f^*(z) = \frac{\pi}{3}, \quad \int_{-\infty}^{0} \varphi^*(z) = 0, \tag{12}$$

$$U_t = -U_\tau = sign(t-\tau)U^*, \quad V_t = -V_\tau = sign(t-\tau)V^*, \tag{13}$$

$$\lim_{\tau\to\pm t}\int_a^b U^*(x-\xi;t-\tau)\alpha(\xi,\tau)d\xi = \pm\pi\alpha(x,t), \quad x\in[a,b], \tag{14}$$

$$\lim_{\tau\to t}\int_a^b U^*(x-\xi;t-\tau)\alpha(\xi,\tau)d\xi = 0, \quad x\overline{\in}[a,b]. \tag{15}$$

$$\lim_{\xi\to+0}\int_\tau^t U_{\xi\xi}(0-\xi;t-\tau)\alpha(\xi,\tau)d\tau = \frac{2\pi}{3}\alpha(t), \tag{16}$$

$$\lim_{\xi\to-0}\int_\tau^t U_{\xi\xi}(0-\xi;t-\tau)\alpha(\xi,\tau)d\tau = -\frac{\pi}{3}\alpha(t), \tag{17}$$

$$\lim_{\xi\to+0}\int_\tau^t V_{\xi\xi}(0-\xi;t-\tau)\alpha(\xi,\tau)d\tau = 0, \tag{18}$$

$$\left|\frac{\partial^{h+k}U}{\partial x^h\partial t^k}\right| < \frac{|x-\xi|^{-\frac{2h+3k+\frac{1}{2}-(-1)^k}{2}}}{|t-\tau|^{\frac{1-(-1)k}{2}}}, \quad \frac{x-\xi}{|t-\tau|^{\frac{2}{3}}} \to -\infty, \tag{19}$$

$$\left|\frac{\partial^{h+k}V}{\partial x^h\partial t^k}\right| < \frac{|x-\xi|^{-\frac{2h+3k+\frac{1}{2}-(-1)^k}{2}}}{|t-\tau|^{\frac{1-(-1)k}{2}}}, \quad \frac{x-\xi}{|t-\tau|^{\frac{2}{3}}} \to -\infty, \tag{20}$$

$$\left|\frac{\partial^{h+k}U}{\partial x^h\partial t^k}\right| < |t-\tau|^{-\frac{2h+3k-1}{3}} \exp\left(-\left(\frac{x-\xi}{|t-\tau|^{\frac{2}{3}}}\right)^3\right), \quad \frac{x-\xi}{|t-\tau|^{\frac{2}{3}}} \to \infty, \tag{21}$$

где

$$U^*(x-\xi;t-\tau) = |t-\tau|^{-1/3} f^*\left(\frac{x-\xi}{|t-\tau|^{2/3}}\right), \quad x\neq\xi, \quad t\neq\tau, \tag{22}$$

$$V^*(x-\xi;t-\tau) = |t-\tau|^{-1/3} \varphi^*\left(\frac{x-\xi}{|t-\tau|^{2/3}}\right), \quad x<\xi, \quad t\neq\tau. \tag{23}$$

2. Основные результаты

Теорема 1. *Задача* (3)-(5) *не имеет более одного решение.*

Доказательство. Пусть задача (3)-(5) имеет два решения: $u_1(x,t), u_2(x,t)$. Тогда пологая

SJIF Impact Factor 2021: 8.013| ISI I.F.Value:1.241| Journal DOI: 10.36713/epra2016 ISSN: 2455-7838(Online)
EPRA International Journal of Research and Development (IJRD)
Volume: 6 | Issue: 12 | December 2021 - Peer Reviewed Journal

$v(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ получим задача типа (3)-(5) относительно функцию $v(x,t)$ с однородными граничными условиями. Теперь рассмотрим тождество

$$\int_0^1\int_0^T L(v)v_x(x,t)dxdt=0. \tag{24}$$

Интегрируя по частям, учитывая однородные граничные условия типа (5), (6), имеем

$$-\int_0^1\int_0^T v_{xx}^2(x,t)dxdt-\frac{1}{2}\int_0^1 v_t^2(0,t)dt=0$$

Отсюда, $v_{xx}(x,t)=0$ в Ω, $v_t(0,t)=0$ в $[0,T]$.

Так как $v_{xx}(x,t)=0$, то $v_x(x,t)=\lambda_1(t),\quad v(x,t)=x\lambda_1(t)+\lambda_2(t).$ По пред-положение функция $v(x,t)=x\lambda_1(t)+\lambda_2(t)$ является решением задачи (3)-(5) с однородным граничным условиям. Поэтому

$$v(0,t)=\lambda_2(t),\quad v(1,t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)=0\ \Rightarrow\ \lambda_1(t)=-\lambda_2(t)$$

С другой стороны

$$v_t(0,t)=0\ \Rightarrow\ v(0,t)=const.$$

Тогда $\lambda_2(t)=const\ \Rightarrow\ \lambda_1(t)=-const$. В силу этого

$$v(x,t)=(1-x)const\ \Rightarrow\ v_x(x,t)=-const.$$

Так как $v_x(0,t)=0,\quad v_x(1,t)=0,$ то $const=0.$ Поэтому $v(x,t)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}.$

Теорема 2. *Пусть* $\psi_1(t)\in C^1([0,T]),\quad \psi_2\in C^1([0,T]),\quad \varphi(t)\in C([0,T]).$ *Тогда существует решение задачи* (3)-(5).

Доказательство. Рассмотрим две вспомогательную задачу:

I. В области $\Omega=\{(x,t):0<x<1,\ 0<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{25}$$

с граничными условиями

$$u(x,0)=u(x,T)=\alpha(x), \tag{26}$$

$$u_x(0,t)=\varphi(t),\quad u(1,t)=\psi_1(t),\quad u_t(1,t)=\psi_2(1,x), \tag{27}$$

где $u(x,0)=\alpha(x)\in C^3((0,1))\cap C^2([0,1])$ пока неизвестная функция.

В силу работы [4] решения задачи (25)-(27) будет в следующем виде

$$2\pi u(x,t)=\int_0^T G_{\xi\xi}(x-1;t-\tau)\psi_1(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^T G_{\xi}(x-1;t-\tau)\psi_2(\tau)d\tau+\int_0^T G_{\xi}(x-0;t-\tau)\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^1\{G_{\tau}(x-\xi;t-T)-G_{\tau}(x-\xi;t-0)\}\alpha(\xi)d\xi, \tag{28}$$

где

$$G(x-\xi;t-\tau)=U(x-\xi;t-\tau)-W(x-\xi;t-\tau),$$

функция $W(x-\xi;t-\tau)$ является решением следующей задачи

$$M(W)\equiv -\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0,$$

$$U|_{\xi=1}=W|_{\xi=1},\quad U|_{\xi=0}=W|_{\xi=0},\quad U_{\xi\xi}|_{\xi=0}=W_{\xi\xi}|_{\xi=0},$$

$$U|_{\tau=0}=W|_{\tau=0},\quad U|_{\tau=T}=W|_{\tau=T}\ .$$

Теперь дифференцируем (28) по t, затем переходим к пределу $t\to 0$. Тогда обозначая $\beta(x)=u_t(x,0)$ получим сотношение между функциями $\alpha(x)$ и $\beta(x)$

$$2\pi\beta(x)=\int_0^T G_{\xi\xi}(x-1;0-\tau)\psi_1'(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^T G_{\xi}(x-1;0-\tau)\psi_2'(\tau)d\tau+\int_0^T G_{\xi}(x-0;0-\tau)\varphi'(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^1 G_{\xi}(x-\xi;0-T)\alpha''(\xi)d\xi. \tag{29}$$

II. В области $\Omega=\{(x,t):0<x<1,\ 0<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{30}$$

с граничными условиями

$$u_t(x,0)=u_t(x,T)=\beta(x), \tag{31}$$

$$u_x(0,t)=\varphi(t),\quad u(1,t)=\psi_1(t),\quad u_t(1,t)=\psi_2(1,x), \tag{32}$$

где $u_t(x,0)=\beta(x)\in C^2((0,1))\cap C^1([0,1])$ пока неизвестная функция.

В силу работы [4] решения задачи (29)-(31) будет в следующем виде

$$2\pi u(x,t)=\int_0^T G_{\xi\xi}(x-1;t-\tau)\psi_1(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^T G_{\xi}(x-1;t-\tau)\psi_2(\tau)d\tau+\int_0^T G_{\xi}(x-0;t-\tau)\varphi(\tau)d\tau+$$

$$+\int_0^1\{G(x-\xi;t-0)-G(x-\xi;t-T)\}\beta(\xi)d\xi, \tag{33}$$

где

$$G(x-\xi;t-\tau)=U(x-\xi;t-\tau)-W(x-\xi;t-\tau),$$

функция $W(x-\xi;t-\tau)$ является решением следующей задачи

$$M(W)\equiv -\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 W}{\partial t}=0,$$

SJIF Impact Factor 2021: 8.013| ISI I.F.Value:1.241| Journal DOI: 10.36713/epra2016 ISSN: 2455-7838(Online)
EPRA International Journal of Research and Development (IJRD)
Volume: 6 | Issue: 12 | December 2021 - Peer Reviewed Journal

$$U|_{\xi=1}=W|_{\xi=1},\quad U|_{\xi=0}=W|_{\xi=0},\quad U_{\xi\xi}|_{\xi=0}=W_{\xi\xi}|_{\xi=0},$$
$$U_\tau|_{\tau=0}=W_\tau|_{\tau=0},\quad U_\tau|_{\tau=T}=W_\tau|_{\tau=T}\ .$$

Теперь переходя к пределу $t\to 0$ из (33) получим второе сотношение между функциями $\alpha(x)$ и $\beta(x)$

$$2\pi\alpha(x)=\int_0^T G_{\xi\xi}(x-1;0-\tau)\psi_1(\tau)d\tau-$$
$$-\int_0^T G_\xi(x-1;0-\tau)\psi_2(\tau)d\tau+\int_0^T G_\xi(x-0;0-\tau)\varphi(\tau)d\tau-$$
$$-\int_0^1 G(x-\xi;0-T)\beta(\xi)d\xi. \tag{34}$$

Итак мы получили система интегральных уравнений (29), (34) относительно функций $\alpha''(x)$ и $\beta(x)$.

Из этой систему исключаем $\alpha''(x)$ и получим интегральная уравнения типа Фредьголма относительно функции $\beta(x)$

$$\beta(x)=\int_0^1 K(x,\xi)\beta(\xi)d\xi+F(x), \tag{35}$$

где $|K(x,\xi)|<\dfrac{C}{|x-\xi|^{1/2}},\ F(x)\in C^1([0,1]).$

В силу единственности решение задачи (3)-(6) интегральная уравнения (35) имеет единственное решени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Del Vecchio E.* Sulle equazioni $z_{xxx}-z_y+\varphi_1(x,y)=0$, $z_{xxx}-z_{yy}+\varphi_2(x,y)=0$. Memorie R. Accad. Sci. Torino (2). 66 (1915).
2. *Cattabriga L.* Un problema al per una equazione parabolica di ordine dispari. Annali della Souola Normale Sup. di Pisa a mat. 1959, Vol. 13, 2, p. 163-203.
3. *Абдиназаров С.* Об одном уравнения третьего порядка. Изв.АН УзССР, Сер.физ.мат. наук 1989, 6, с 3-7.
4. *Хашимов А.* Об одной задаче для уравнения смешанного типа с кратными характеристиками. Уз. Мат. Журнал, 1995, 2, с 95-97.